Frank-Michael Krupp krupp@epost.de www.vuni.de

1 Integralrechnung

1.1 Aufgaben der Integralrechnung

Die Infinitesimalrechnung umfaßt zwei Rechenarten: Das Differenzieren und deren Umkehrung, das Integrieren. Die Begründer der Differentialrechnung sind Newton (1643 - 1727) und Leipniz (1646 - 1716). Während bei der Differentialrechnung das Tangentenproblem zu lösen war, gibt es bei der Integralrechnung das Flächeninhaltsproblem. Mit der Differentialrechnung kann die Ableitung von Funktionen gebildet und somit die Eigenschaften untersucht werden. Eine Besonderheit bei der Differentialrechnung ist, daß es genügt, einen kleinen Ausschnitt zu kennen, um an dieser Stelle die Steigung zu berechnen. Welche Gestalt die Kurve in einiger Entfernung hat, ist dabei völlig gleichgültig. Dagegen ist bei der Integralrechnung (integer = ganz) der ganze Verlauf der Funktion von Bedeutung, um den Flächeninhalt eines von einer geschlossenen Kurve begrenzten Flächenstück zu berechnen, die Bogenlänge zu bestimmen (Rektifikation) eine Mantelberechnung von Rotationskörpern durchzuführen, die Bewegung von Massepunkten und Bestimmung der Arbeit in der Physik.

1.2 Integralbegriffe

In der Mathematik haben sich drei unterschiedliche Integralbegriffe entwickelt.

1. Das Lebesgue-Integral hat in der Wahrscheinlichkeitstheorie (Maßtheorie) eine große Bedeutung. (nach H. Lebesgue 1875-1941). Das Lebesgue-Integral kann man als eine Verallgemeinerung des Riemann-Integral ansehen. Ist eine Funktion in einem Intervall Riemann - integrierbar, dann stimmen die beiden Integrale (Lebesgue - Riemann) in diesem Bereich überein.
2. Das Stieltjes-Integral ist in der Zahlentheorie und auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie von Nutzen. Dieses Integral (nach T. J. Stieltjes 1856 - 1894) ist auch eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals.
3. Der einfachste Integralbegriff ist das Riemann-Integral, eine Erweiterung des Cauchy-Integrals. Es spielt in naturwissenschaftlichen und technischen Anwendungen die größte Rolle (nach B. Riemann 1826-1866). Eine Funktion ist in einem Intervall (Riemann)-integrierbar, wenn sie dort keine Unstetigkeitsstelle besitzt. Das Riemann-Integral läßt sich auch auf Funktionen ausdehnen, die im Integrationsintervall unbeschränkt sind. Es handelt sich dann um uneigentliche Integrale.

Die genannten Integrale beziehen sich auf eine reelle Variable. Für Funktionen von zwei reellen Variablen kann man Integrale definieren, deren Integrationsbereich eine Kurve ist (Kurvenintegral), und solche, deren Integrationsbereich ein Gebiet ist (Gebietsintegral). Es gibt außerdem noch unterschiedliche Arten von Integralen für Funktionen mit mehr als zwei Variablen.
Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das Riemann-Integral für reelle Funktionen einer reellen Variablen.

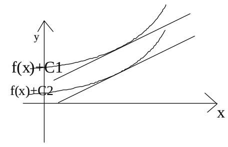
1.3 Unterschied Unbestimmtes - Bestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral ist eine Funktion.
Das bestimmte Integral ist eine Zahl.

1.3.1 Das unbestimmte Integral

Das unbestimmte Integral hat die Form

$\int f(x)\,dx = F(x)+C$



Die Lösung des unbestimmten Integral ist eine Kurvenschar, die alle die Ableitung f(x) haben. Sie haben also an jedem beliebigen x_0 parallele Tangenten. Die Umkehrung der Differentiation ist nicht mehr eindeutig, weil die Integrationskonstante C einen beliebigen Wert annehmen kann. C ist eine beliebige, nicht von x abhängige Größe. F(x), deren Ableitung die gegebene Funktion f(x) ist, heißt Stammfunktion dieser Funktion f(x). Eine Funktion f(x) hat unendlich zugehörige Stammfunktionen F(x)+C, denn es gilt: $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$.

Weil die Integrationskonstante unbestimmt bleibt, nennt man das Integral „unbestimmtes Integral."

1.3.2 Das bestimmte Integral

Um eine bestimmte Integralkurve zu erhalten, muß ein Punkt P_0 gegeben sein, durch den die Kurve laufen soll. Die Integrationskonstante C erhält dann einen festen Wert: $y_0=F(x_0)+C$

$C=y_0-F(x_0)$.

Läßt sich die Integrationskonstante bestimmen, so heißt ein solches Integral „bestimmtes Integral."

Das bestimmte Integral hat die Form

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Das Ergebnis ist eine Zahl (Fläche), deren Größe von den Grenzen a und b abhängig ist.

Wenn man nun statt der festen Ordinate (senkrechte Achse der Koordinaten) x=b eine bewegliche Ordinate verwendet, erhält man als Größe der Fläche F_{ax} eine Funktion F(x).

Die Flächeninhaltsfunktion $F_a(x)$ mit der festen unteren Grenze a ist eine Stammfunktion, sie läßt sich auch mit der beliebigen Stammfunktion F(x) darstellen:

$F_a(x) = F(x) + C$ (C: Additive Integrationskonstante $C \in \Re$)

Wenn man nun x ersetzt durch a, erhält man:

$[F_a(a)=0]=F(a)+C \quad | -F(a)$

$C=-F(a) \quad |$ Einsetzen in Anfangsgleichung

$F_a(x)=F(x)-F(a)$

Durch Ersetzen von x durch feste Grenze b, erhält man:

$F_a(b)=F(b)-F(a)$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und stetig. Ferner sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt für $a,b \in I$.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

1.4 Einschränkende Bedingungen

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt nur, wenn

- f(x) stetig ist

Zum Lösen von Flächenproblemen müssen zwei weitere Bedingungen beachtet werden:

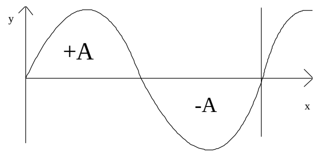
- f(x) positiv
- $a \leq x \leq b$ erfüllt

Wenn Forderung 2 nicht erfüllt ist, und die Funktion negative Werte annimmt, dann ergibt sich für den Flächeninhalt ein negativer Betrag. Wenn $W=\Re$ gilt, dann können sich Teilflächen ausgleichen.

(Beispiel Sinusfunktion)

Die beiden Teile (+A und -A) kompensieren sich.

$$\int_{0°}^{360°} \sin(x)\,dx = 0$$

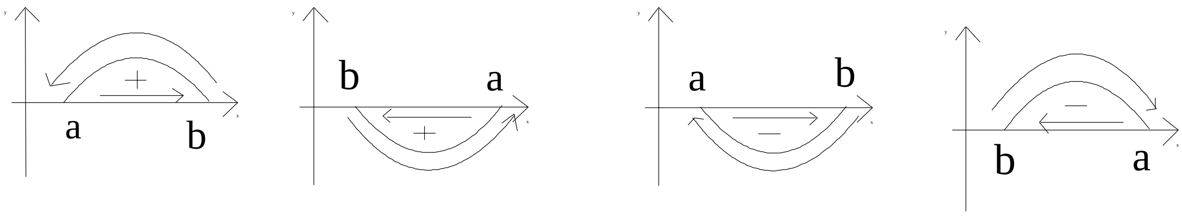


Analog geschieht dasselbe bei Nichterfüllung von Forderung 3.

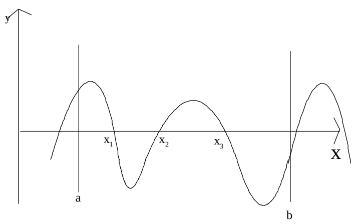
Das Vorzeichen der Fläche ergibt sich aus ihrem Umlaufsinn, wenn man in der Richtung von der unteren zur oberen Grenze fortschreitet.

Entspricht der Umlaufsinn dem positiven Drehsinn, so erhält man bei der Flächenberechnung durch Integration einen positiven Wert, im Falle des negativen Drehsinns einen negativen.

Die Flächen sind vorzeichenbehaftet. Man muß deshalb oberhalb und unterhalb der x-Achse gelegene Flächenstücke gesondert bestimmen.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)\,dx\right|$$



1.5 Grundintegrale

Ist k eine positive Zahl, so ist für jedes Intervall

$$\int mx^k\,dx = \frac{mx^{k+1}}{k+1}$$

Ist k eine von -1 verschiedene negative Zahl, so gilt die gleiche Formel für jedes Intervall, das die Stelle 0 nicht enthält ($0^{-n} = \frac{1}{0^n} = n.def.$)

Wenn k=0 ist gilt die Formel:
$\int m\,dx = mx$

Und wenn k=−1 ist, gilt die Formel:
$\int \frac{m}{x}dx = m \cdot \log|(x)|$[1]

Das Integral $\int \frac{1}{x}dx = \log(x) + c$ ist nicht lösbar wenn x<0 ist, weil der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist. Es müssen Betragsstriche gesetzt werden. $[\log(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$
Für x<0 ist nur log(−x) definiert.

Für jedes Intervall gelten die Gleichungen
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$ Winkel in
$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$ Bogenmaß

1.6 Rechenregeln

Um Integrale auf die Form von den genannten Grundintegralen zu bringen, gibt es einige einfache algebraische Umformungen. Die vorgestellten Grundregeln sind bei komplizierten Funktionen nur unzulänglich.

Vertauschung der Integrationsgrenzen
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
Beweis : F(b)−F(a) = − (F(a)−F(b))

Achsensymmetrische Funktionen
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$$
Beweis: F(a)=-F(-a); F(a)-F(-a)=2 · F(a)

Identische Grenzen
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
Beweis: F(a)−F(a)=0

Zusammenfassung zweier Integrale gleichem Argumentes.
$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int (f(x)+g(x))\,dx$
Beweis: F(b)−F(a)+G(b)−G(a) = F(b)+G(b)−F(a)−G(a)

Die Integrationsvariable darf beliebig bezeichnet werden
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

[1] Logarithmus mit der Basis e=2,718..... (Eulersche Zahl) entspricht dem natürlichen Logarithmus. Statt log(x) und $\log_e(x)$ kann man auch ln(x) schreiben.

Beweis: F(b)-F(a) = F(b)-F(a)

Eine Konstante kann man vor das Integral setzen, sie bleibt erhalten:

$\int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$

Beweis: $c \cdot F(b) - c \cdot F(a) = c \cdot (F(b) - F(a))$

Aufspaltung eines bestimmten Integrals (Intervalladditivität)

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Beweis: F(b)-F(a) + F(c)-F(b) = F(c)-F(a)

Zusammenfassung der beiden letzten Regeln ergibt:

$\int (c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + ... + c_m \cdot f_m(x))\; dx = c_1 \cdot \int f_1(x)dx + c_2 \cdot \int f_2(x)dx + ... + c_m \cdot \int f_m(x)dx$

Beim Differenzieren ließ sich die Ableitung nach einer kleinen Zahl von festen Regeln immer leicht berechnen. Die Lösung beim Integrieren ist nicht so einfach. Nur wenige Funktionen lassen sich durch algebraische Umformung auf die Grundintegrale zurückführen. Man kann zu einigen Funktionen keine Stammfunktion für den gesamten Bereich angeben. Bis auf die unlösbaren Aufgaben lassen sich aber viele Integrale in Gruppen einordnen und nach einer für diese Gruppe geeignetem Methode lösen. Die im folgenden vorgestellten Grundregeln sind aus der Differentialrechnung übernommen. Viele stetige Funktionen lassen sich nicht in geschlossener Form integrieren, obwohl es zu jeder Funktion f(x) eine Stammfunktion F(x) gibt. „Das Differenzieren ist ein Handwerk, das Integrieren eine Kunst.“ [1]

Es gibt elementare Funktionen, die sich nicht elementar[2] integrieren lassen.

Beispiele solcher nicht elementarer Integrale:

$\frac{e^x}{x}$; $\frac{\sin(x)}{x}$; $\frac{1}{\log(x)}$; $F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int e^{-x^2} dx$; $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$; $\int \frac{\cos(x)}{x} dx$; $\int \frac{1}{\log(x)} dx$; $L - \int \cos(\frac{\pi}{2}) x^2 dx$

1.7 Integration durch Substitution

1.7.1 Herleitung

Eine Methode zur Lösung von komplizierteren Integranden ist die Anwendung der Substitution.

Die Funktion f(x)=a+bx soll algebraisch umgeformt werden und dann mit Hilfe der Grundintegrale integriert werden.

$\int (a+b \cdot x)\, dx = a \cdot \int 1\, dx + b \cdot \int x\, dx$ (Konstantenregel)

$= a \cdot x + \frac{1}{2} b \cdot x^2$

Die gleiche Funktion soll nun durch Substitution gelöst werden.

Man ersetzt a + bx durch eine neue Veränderliche

z:= a+bx

$\int z\, dx$

Auch das dx muß jetzt durch dz ersetzt werden.

Dazu muß $z=a+b \cdot x$ differenziert werden.

---

[1] Knerr, Richard: Mathematik, Eine lebenswichtige und faszinierende Wissenschaft. S. 522.

[2] In elementaren Funktionen werden nur endlich viele algebraische oder trigonometrische Operationen mit der unabhängigen Variablen x, Funktionen und Konstanten ausgeführt.

Bei der Reihenintegration wird eine unendliche Summenreihe verwendet, die Integration ist nicht mehr elementar.

$z' = (a+b\cdot x)'$

$dz = (a+bx)dx$

$dz = 0+b\,dx \rightarrow dx = \frac{dz}{b}$

$\int z \cdot \frac{dz}{b}$

b ist eine Konstante und kann vor das Integral gesetzt werden:

$\frac{1}{b} \cdot \int z\,dz$

$\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{2} z^2$

für z wird wieder a+b · x eingesetzt

$\frac{1}{2b} \cdot (a^2 + 2ab \cdot + b^2x^2) = \frac{1\,a^2}{2b} + ax + \frac{bx^2}{2}$

$ax + \frac{1}{2} b\,x^2$	$ax + \frac{1a^2}{2b} + \frac{bx^2}{2}$

Beide Ergebnisse stimmen überein (Probe durch Differentiation):

a+bx	a+0+bx

Wichtig ist bei der Substitution nach dem Ersetzen von x durch z ersetzt, auch dx durch dz zu ersetzen.

Allgemein:

	SUBSTITUTION	SUBSTITUTIONSINTEGRAL	ERGEBNIS
$\int (a+b\cdot x)dx$	$z=a+b\cdot x$ $dz=b\cdot dx$ $dx=\frac{dz}{b}$	$\frac{1}{b} \cdot \int z\,dz$	$ax + \frac{1}{2} b x^2$
$\int (a+b\cdot x)^n\ dx$	$z=a+b\cdot x$ $dz=b\cdot dx$ $dx=\frac{dz}{b}$	$\frac{1}{b} \cdot \int z^n\,dz$	$\frac{1}{b} * \frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}$

Die Herleitung der Substitution wird mit Hilfe der Kettenregel der Differentialrechnung geleistet.[1]

1.7.2 Besonderheiten bei bestimmten Integralen

Bei der Berechnung von bestimmten Integralen kann man sich die Rücksubstitution (x → z) ersparen, wenn die Grenzen mit umgeformt werden.

$\int_1^2 (3 - 4x)^2 dx$

$x_1=1 \quad x_2=2$

$z=3-4x \rightarrow z_1=-1 \quad z_2=-5$

$\int_{-1}^{-5} (\frac{1}{-4} * z^2 = \frac{1}{-4} * (\frac{1}{3} z^3) \Big|_{-1}^{-5} = 10\frac{1}{3}$

1.7.3 Integrale der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

Der Integrand ist ein Bruch, dessen Zähler die erste Ableitung des Nenners ist.

Behauptung $c \cdot \int \frac{Ableitung}{Funktion} = c \cdot \log(|\ Funktion\ |)$

[1] siehe Gundlach, Karl-Bernhard: Infinitesimalrechnung. S. 556

Man substituiert den Nenner f(x) =u, der Zähler hat dann den Wert du

f´ (x) dx =du

Allgemein:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \log|u| = \log|f(x)|$$

1.8 Partielle (Teilweise) Integration

1.8.1 Herleitung

Bei manchen Integralen läßt sich die Substitution nicht anwenden, man muß den Integranden in Faktoren zerlegen und danach integrieren. Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel der Differentiation.

$p(x)=f(x) \cdot g(x) \rightarrow p'(x)=f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\int p'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x)$

$p(x) = f(x) \cdot g(x) = \int f(x) \cdot g'(x)\,dx + \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$ |Ersetzen von f(x) durch deren Stammfunktion F(x)

$F(x) \cdot g(x) = + \int f(x) \cdot g(x)\,dx$ $|- \int F(x) \cdot g'(x)\,dx$

$\int f(x)\, g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx$

f und g sind Funktionen des gleichen Argumentes x, sie sind im gleichen Intervall differenzierbar.
Ist f(x) eine Funktion, die in einem bestimmten Intervall eine Stammfunktion F(x) besitzt, und ist g(x) in dem Intervall differenzierbar, dann gilt:

$\int f(x)\, g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx$

Formel für die teilweise/partielle Integration oder Produktintegration.

Beweis:

Ableitung bilden auf beiden Seiten:

$f(x)\, g(x) = \underbrace{f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)}_{\text{Produktregel}} - F(x) g'(x)$

Die Formel führt die Integration eines Produktes auf das Produkt einer Stammfunktion und Funktion und auf die Integration eines Produktes einer Stammfunktion und einer Ableitung zurück. Bei geschickter Wahl wird $\int f(x)\, g(x)\,dx$ damit leichter zu berechnen.

Beispiel :

$\int x \cos(x)\,dx$

$g(x) = x \quad f(x) = \cos(x)$

$g'(x) = 1 \quad F(x) = \sin(x)$

$\int x \cos(x)\,dx = (\sin(x)) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1\,dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Der Integrand ist vereinfacht worden von x cos(x) auf sin(x), einem Grundintegrand.

1.8.2 Rekursionsformel

Mit der Rekursionsformel wird der Exponent von n auf n–2 zurückgeführt. Nach mehrmaliger Anwendung kann das Integral auf $\int \sin^0(x)\,dx = x$ oder $\int \sin^1(x)\,dx = -\cos(x)$ zurückgeführt werden.

Die n-fache partielle Integration:

$\int x^n \sin(x)\,dx$

$f(x) = \sin(x) \quad g(x)=x^n$
$F(x)=-\cos(x) \quad g'(x)=nx^{n-1}$
$\int x^n \sin(x)dx = -x^n \cdot \cos(x) - \int -\cos(x) \cdot nx^{n-1} dx$

Nebenrechnung: $\int -\cos(x) \cdot nx^{n-1} dx$
$f(x) =-\cos(x) \quad g(x) = nx^{n-1}$
$F(x) =-\sin(x) \quad g'(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$

$\int -\cos(x) \cdot nx^{n-1} dx = -nx^{n-1} \sin(x) - \int -\sin(x) \cdot n \cdot (n-1)x^{n-2} dx$

$\int x^n \sin(x) dx = - x^n \cdot \cos(x) - (- n \cdot x^{n-1} \sin(x) - \int -\sin(x) \cdot n(n-1) x^{n-2} dx$
$= -x^n \cdot \cos(x) + n \cdot x^{n-1} \cdot \sin(x) + \int -\sin(x) \cdot n(n-1)^{n-2} n-2 dx$
Man wiederholt diesen Vorgang solange, bis x^n zu Null geworden ist.

für ungerade n ergibt sich:
$-x^n \cdot \cos(x) + nx^{n-1} \cdot \sin(x) - n \cdot (n-1) x^{n-2} \cdot \cos(x) + n \cdot (n-1)(n-2) \cdot x^{n-3} \sin(x) + ... + n!\, x^{n-n} \sin(x)$

für gerade n ergibt sich:
$-x^n \cdot \cos(x) + nx^{n-1} \cdot \sin(x) - n \cdot (n-1) x^{n-2} \cdot \cos(x) + n \cdot (n-1)(n-2) \cdot x^{n-3} \sin(x) + ... - n!\, x^{n-n} \cdot \cos(x)$

1.8.3 Besonderheiten bei bestimmten Integralen

partielle Integration bei bestimmten Integralen
Die Grenzen gelten auch für den integralfreien Teil $F(x) \cdot g(x)$. Man kann die Grenzen bereits bei den einzelnen Teilen oder erst bei der vollständigen Stammfunktion einsetzen.

Bei der partiellen Integration ist es wichtig, die trigonometrische Funktion (oder die Exponentialfunktion e^x) als ersten Faktor (f(x)) und die Potenz (x^n) als zweiten Faktor (g(x)) zu verwenden. Beim Vertauschen wird das Integral noch schwieriger, anstatt einfacher:
$f(x) =x^n \quad g(x) \cos(x)$
$\int \cos(x) \cdot x^n dx = \int \cos(x) \cdot x^n dx - \cos(x) \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int -\sin(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} dx$

Man kann den Integranden durch Zufügen des Faktors 1 $\left(\frac{p(x)}{p(x)}\right)$ in ein Produkt verwandeln und dann die partielle Integration anwenden. $x>0$
$\int \log(x) dx$
$f(x)=1 \quad g(x)=\log(x)$
$F(x)\ x \quad g'(x) = \frac{1}{x}$
$\int \log(x) dx = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x$
Bei $x>0$ ist $\int \log x dx =x(\log(x)-1)$.
Allgemein: $\int g(x)dx = x \cdot g(x) - \int x g'(x)dx$.

1.8.4 Integration eines Quotienten

Wie bei der Produktintegration kann man hier eine Formel für die Differentiation umkehren:
Die Quotientenregel der Differentiation lautet:

$$\frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = \frac{f'_1(x) \cdot f_2(x) - f'_2(x) \cdot f_1(x)}{(f_2(x))^2}$$; durch integrieren erhält man :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \int \frac{f'_1(x) \cdot f_2(x) - f'_2(x) \cdot f_1(x)}{(f_2(x))^2} dx$$

$$\frac{Z(x)}{N(x)} = \int \frac{N(x) \cdot Z'(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2} dx$$

Die Herleitung der für die Partialbruchintegrale wichtige Form 1.Ableitung/Funktion ist hiermit möglich.

1.9 Integration durch Reihen

Integrale der Form $\int \frac{\cos}{\sqrt{x}} dx$ lassen sich lösen, indem man den Integranden in eine unendliche Reihe verwandelt und die Reihe gliedweise integriert.

Nach der Potenzreihe ist

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots..$$

$$\sin(x) = \frac{x}{(1!)} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots..$$

Beispiel:

$$\int \cos(x)\,dx = \int 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots..dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 2!} + \frac{x^5}{5\cdot 4!} - + \ldots..$$

$$= \frac{x}{(1!)} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots.. = \sin(x)$$

weiteres Beispiel:

$$\int \frac{\cos(x)}{x} - \int \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - + \ldots.dx - \log|(x)| - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - + \ldots$$

1.10 Weitere Integrationsverfahren

Als letztes werden zwei besondere Integrationsverfahren erläutert. Beide werden angewendet, wenn das Aussehen des Integranden unbekannt ist. Dies ist der Fall bei Maschinen, die eine Kurve aufzeichnen, die nicht als exakte Funktion angegeben werden kann. Weil die Funktion also nur graphisch bekannt ist, gibt es nur näherungsweise Lösungen.

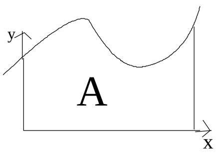
Beide Verfahren können auch angewendet werden, wenn die Funktion rechnerisch zu kompliziert oder überhaupt nicht integrierbar ist.

1.10.1 Numerische Integration

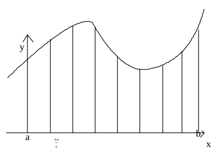
Die numerische Integration hat das Ziel, durch Summierung möglichst vieler berechenbaren Flächen, einen Wert Q zu erhalten, der sich von dem tatsächlichen Flächeninhalt A nur wenig unterscheidet:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = Q + \mathrm{E}$$

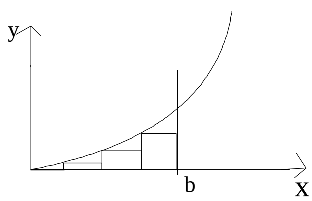
Q ist ein Näherungswert für I. E ist der Fehler des Verfahrens.



Es sei einen Funktion y = f (x) gegeben, die in dem Intervall $a \leq x \leq b$ stetig und positiv ist. Die Fläche A, die die Kurve, die beiden Abszissen (Waagrechte Achse im Koordinatensystem) x=a und x=b und die x-Abszisse begrenzen, soll berechnet werden.



Dazu zerlegt man die Strecke $\overline{ab}$ in n Abschnitte, die möglichst gleicher Breite sind (ist aber nicht unbedingt notwendig). Die entstehenden Rechtecke haben die Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und die Höhen f(a), $f(a+\Delta x)$, $f(a+2\Delta x)$,.....,$f(a+(n-1)\cdot\Delta x)$ und $f(a+n\cdot\Delta x) = f(b)$.



Die Untersumme der Flächeninhalte ergibt:

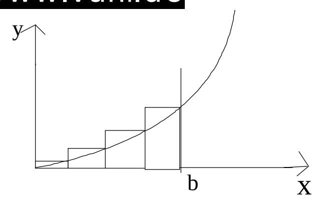
$$f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots.f(a+(n-1)\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

Diese Summe approximiert von unten an den Flächeninhalt A bei Erhöhung von n.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(a)\cdot\Delta x + f(a+\Delta x)\cdot\Delta x + f(a+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + \ldots.f(a+(n-1)\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\right\} = A_{\infty}$$

$$A_{nu} = \sum_{s=0}^{n-1} f(a+s\cdot\Delta x)\,\Delta x$$

Analog zu dieser Untersumme erhält man bei der Obersumme



$A_{no} = f(a + \Delta x)\,\Delta x + \ldots + f(b)\,\Delta x$

$$A_{no} = \sum_{s=1}^{n} f(a + s \cdot \Delta x)\,\Delta x$$

$A_{nu} < A < A_{no}$

$$\lim_{n \to \infty} A_{nu} = \lim_{n \to \infty} A_{no} = A$$

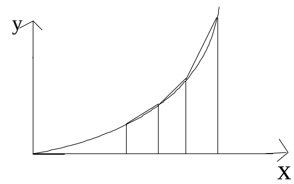
Das Integralzeichen kann man also als Summenzeichen auffassen.

$$\sum_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Das Intervall von a bis b wird in unendlich kleine Schritte zerlegt, von denen jeweils das Differential f(x)dx berechnet wird. Die Summe der Differentiale ist das bestimmte Integral.

Beispiel:

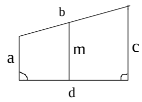
Man kann natürlich auch andere Flächen verwenden, z.B. ein Trapez, bei dem das entsprechende Kurvenstück die Sehne bildet.



Gegeben sei die Parabel $y = \frac{1}{2} x^2$. Die Fläche soll mit Hilfe von Trapezen (a=0, b=4) berechnet werden.

Der Flächeninhalt eines Trapezes beträgt A=Breite*Länge,

$A = d \cdot m = d \cdot \frac{1}{2}(a+c)$. ist die Sehne eines Trapezes



$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot a$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx Q_T = \frac{x_1 - x_0}{2}(y_0 + y_1) = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + y_1)$$

$n=4$ $\Delta x=1$

$A_4 = [\,\frac{1}{2}(0+1) \cdot 1 + \frac{1}{2}(1+4) \cdot 1 + \frac{1}{2}(4+9) \cdot 1 + \frac{1}{2}(9+16) \cdot 1\,] \cdot \frac{1}{2} = 11$

$n=8$ $\Delta x=\frac{1}{2}$

$A_8 = [\,\frac{1}{2}(0+\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{2}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{2}{2}+\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}(\frac{7}{2}+\frac{8}{2})^2 \cdot \frac{1}{2}\,] \cdot \frac{1}{2} = 10{,}75$

A_1	A_2	A_4	A_8
16	12	11	10,75

Es entsteht eine monoton fallende Folge, die den Grenzwert $A_{n=}$ 10,66 hat.

Der Fehler des Verfahrens E wird immer kleiner, desto höher n und desto kleiner Δx wird.

Allgemein:

$$y = \frac{1}{2} x^2$$

$A_{n=}$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\left((0 \Delta x)^2 + (1 \Delta x)^2\right) \Delta x\right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \left[\left((1 \Delta x)^2 + (2 \Delta x)^2\right) \Delta x\right] +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \left[\left((2 \Delta x)^2 + (3 \Delta x)^2\right) \Delta x\right] +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \left[\left((n - 1 \Delta x)^2 + (n \Delta x)^2\right) \Delta x\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \Delta x^3 \left(0^2 + 1 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + (n-1)^2 + n^2\right)$$ | Ersetzen von Δx^3 durch $\frac{b-0}{n}$

$$= \frac{1 b^3}{2 n^3} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right) + \frac{1 b^3}{4 n^3} \cdot \left(0^2 + n^2\right)$$

|Summenformel der arithmetischen Reihe

$$= \frac{1 b^3}{2 n^3} \cdot \left(\frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{6}\right) + \frac{1 b^3}{4 n^3} \cdot n^2$$

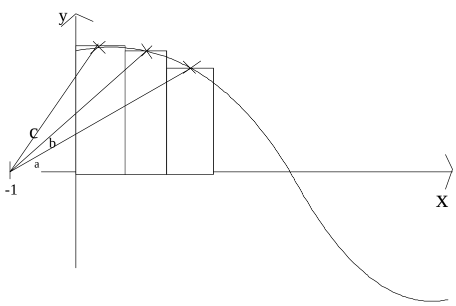
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 b^3}{6 n^3} \cdot \left(\frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{2}\right) + \frac{1 b^3}{4 n} - \frac{1}{6} b^3 + 0$$

Zusammenfassung

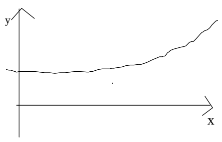
- Zerlegung des Intervalls (möglichst äquidistant) $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$
  Schrittweite $\Delta x = x_k - x_{k-1}$
- Summierung der Rechteckflächen/Trapezflächen
- Verfeinerung der Zerlegung $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$.

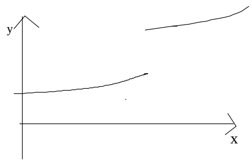
1.10.2 Graphische Integration

Vorgehensweise: Die Kurve wird durch eine angenäherte Treppenkurve aus möglichst schmalen Rechtecken ersetzt. Die Höhen der Rechtecke werden auf die y–Achse übertragen und mit dem Punkt –1 auf der x–Achse verbunden. Die Winkel, die dabei entstehen (a, b, c,.....), entsprechen den Steigungen der Integrationskurve im Bereich des jeweiligen Rechtecks. Bei der Aneinanderreihung ergibt sich der Graph der Stammfunktion. [1]



1.11 Stetigkeit





Für eine anschauliche Vorstellung vom Begriff der Stetigkeit stellt man sich die Funktionskurve als einen Faden vor. Ist die Kurve stetig, so reißt der Faden nicht ab. Eine Funktion ist stetig, wenn sich der Funktionswert f(x) nur wenig verändert, wenn sich das Argument x wenig verändert. Eine stetige Funktion darf keine Sprünge machen.

1.11.1 Stetigkeit an einer Stelle

Eine Funktion kann an der Stelle a folgende Zustände haben.

1) f(a) ist nicht definiert
2) $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$
3) $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

Eine Funktion heißt stetig an einer Stelle a, wenn sie dort definiert ist und $f(a) - \lim_{x\to a} f(x)$ gilt.

[1] Kusch; Rosenthal: Mathematik, Band 4, Integralrechnung. S. 155-157

Wenn Bedingung 1 oder 2 gilt, dann ist die Funktion unstetig.

Definition1: Eine Funktion ist dann und nur dann stetig an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$.

Definition2: Zwei in x_0 stetige Funktionen kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (Nenner $\neq 0$), die neue Funktion ist auch in x_0 stetig.

$f(x) = x$ ist stetig, denn es ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x) = c$ ist stetig, denn es gilt $| f(x) - f(x_0) | = | c - c_0 | = 0 < \epsilon$.

Nach Definition 2 ist dann auch die Potenzfunktion $f(x) = ax^n$ stetig, sie entsteht durch n-fache Multiplikation von $f_1(x) = a_1 x$

Auch die ganzen rationalen Funktionen sind stetig, sie Summen von mehreren Potenzfunktionen, die stetig sind.

Ebenso die rationalen Funktionen, ausgenommen an der Nullstelle des Nenners, die durch Division zweier stetiger ganzen rationalen Funktionen entstehen.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^n + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots\ldots b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Beispiel für unstetige Funktionen: $f(x) = \frac{1}{x}$

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig, weil sie dort nicht definiert ist.

Nähert man sich von links dieser Unstetigkeitsstelle: $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$

Nähert man sich von rechts dieser Unstetigkeitsstelle: $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty$

Die beiden Grenzwerte stimmen nicht überein, $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ $x_0 = 0$ ist eine Unendlichkeitsstelle.

1.11.2 Stetigkeit in einem Intervall

f heißt stetig auf der Teilmenge $x \subseteq D(f)$, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in D(f)$ stetig ist.

1.11.3 Stetigkeit im Definitionsbereich

f heißt stetig, wenn sie im ganzen Definitionsbereich stetig ist.

Die meisten übliche Funktionen sind stetig, eventuell mit Ausnahme von einzelnen Punkten, zum Beispiel die Nullstellen des Nennerpolynoms einer gebrochenrationalen Funktion.

1.11.4 Bedeutung der Stetigkeit bei der Integralrechnung

Jede im Bereich der Grenzen [a,b] beschränkte, monotone Funktion ist integrierbar.

Nicht monotone Funktionen lassen sich auch integrieren, wenn sie sich in Teilintervall zerlegen lassen, auf denen die Funktion monoton ist.

Eine Funktion f:[a,b] ist integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \Re^+$ eine Treppenfunktion t_ε :[a,b] gibt, so daß für alle x [a,b] gilt: $|f(x) - t_\varepsilon| < \varepsilon$.

Damit ist jede stetige Funktion integrierbar.

Für die Existenz einer Stammfunktion zu f ist die Stetigkeit von f auf dem ganzen Intervall nicht unbedingt erforderlich.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \in \Re \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

an der Stelle 0 nicht stetig, trotzdem ist eine Stammfunktion vorhanden.

Wenn aber f auf [a,b] stetig ist, so gibt es immer eine Stammfunktion.

Satz: Ist eine Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist die f´(x) an der Stelle x_0 auch stetig.

Beweis:

Die Steigung einer Tangente beträgt $m=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x)$

$f(x)-f(x_0) \rightarrow f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Wenn man nun x gegen x_0 streben läßt, strebt die rechte Seite gegen 0, man erhält

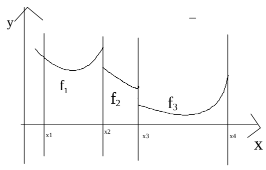
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

Das Gegenbeispiel hierfür ist die Funktion f(x)=|x|.

Sie ist an der Stelle x=0 stetig, aber nicht differenzierbar.

Das bestimmte Integral ist auch für manche nicht stetige Funktionen definiert. Sie müssen stückweise stetig sein.



f ist in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_1]$ stetig.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x_1)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x_2)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x_3)\,dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{n} f(x_{n-1})\,dx$$

Dabei müssen die Randpunkte definiert sein.